

EFEKTYWNOŚĆ UKŁADU PŁODOZMIANOWEGO

Urszula Bronowicka-Mielniczuk

Katedra Zastosowań Matematyki Akademii Rolniczej w Lublinie
ul. Akademicka 13, 20-950 Lublin
e-mail: urszula.bronowicka@ar.lublin.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono statystyczne kryterium służące ocenie i porównywaniu schematów doświadczalnych związanych z polowym eksperymentem płodozmianowym, realizowanym w oparciu o plony tzw. rośliny testowej. Zastosowanie rośliny testowej przy opracowywaniu wyników doświadczenia powoduje, iż zachodzi potrzeba określenia "wielkości strat" jakie ponosimy z punktu widzenia własności statystycznych układu. Zważywszy na strukturę układów płodozmianowych, stosowaną teorię rozwinęto wykorzystując podstawowe idee związane z efektywnością układów bloków niekompletnych. Efektywność oparta o estymację kontrastów elementarnych dostarcza prostego kryterium oceny układu płodozmianowego. Należy podkreślić, iż taka ocena jest dokonywana już w fazie opracowania planu eksperymentalnego. Odwołując się do wspomnianego kryterium decydujemy się na układy, których efektywność jest dominująca w pewnej grupie układów dopuszczalnych ze względu na uwarunkowania przyrodniczo-organizacyjne.

Słowa kluczowe: doświadczenie płodozmianowe, współczynnik efektywności, roślina testowa

Klasyfikacja AMS 2000: 62K10

1. Wstęp

Najczęściej stosowanym kryterium oceny płodozmianów jest ocena wartościowa produkcji. Jednak ze względu na występowanie różnych roślin jest zadanie to jest skomplikowane. Do porównywania płodozmianów stosuje się plony rzeczywiste wybranych roślin (rośliny testowe) lub plony przeliczeniowe

wszystkich roślin występujących w płodozmianach, wyrażone w porównywalnych jednostkach. Przyjętym w pracy miernikiem zdolności produkcyjnych zmianowania są plony rzeczywiste rośliny testowej. Dzięki temu można uniknąć procedury przeliczeniowej, a więc rzeczywiste obserwacje nie są obciążone błędem przeliczeniowym. Z drugiej jednak strony, zakres informacji uzyskanej z doświadczenia zostaje zawężony- uwzględnia się bowiem plony tylko jednej z roślin wchodzących w skład zmianowania. Zaproponowane w pracy kryterium oceny układów płodozmianowych, określa "stratę" informacji wynikającą ze świadomego ograniczenia obserwacji tylko do plonów rośliny testowej. Kryterium to daje odpowiedź na pytanie, w jaki sposób rozmieszczenie rośliny testowej wpływa na precyzję wnioskowania statystycznego oraz umożliwia poznanie statystycznych skutków skrócenia (celowego lub z przyczyn losowych) czasu trwania eksperymentu płodozmianowego.

2. Założenia teoretyczne i metodyka eksperymentalna

W sferze naszego zainteresowania pozostają doświadczenia w których testuje się co najmniej dwa płodozmiany. Każdy z płodozmianów ma określone, racjonalne następstwo roślin wynikające z uwarunkowań agrotechnicznych. Podstawą oceny produkcyjnej płodozmianów są plony rośliny testowej, która występuje w każdym roku doświadczenia przynajmniej na jednym z pól każdego z porównywanych układów zmianowania. Cel poznawczy doświadczenia nie dotyczy wpływu zabiegów agrotechnicznych na efektywność ekonomiczną schematu zmianowania.

Metodykę opracowania wyników można scharakteryzować w następujących punktach (Przybysz, 1982a):

1. Ostateczne opracowanie wyników opiera się na plonach wybranej rośliny testowej.

2. Teoretyczne metody porównania różnych układów zmianowania zostają opracowane przy użyciu zmodyfikowanego schematu rozszczepionych bloków. Model liniowy doświadczenia uwzględnia lata jako czynnik stały.

3. Aby płodozmiany były porównywalne występowanie rośliny testowej w całym zmianowaniu nie może być dowolne. Z tego powodu rozpatruje się tzw. układy spójne, co gwarantuje estymowalność kontrastów obiektowych.

4. Efekty porównywanych schematów zmianowania "przeniesione" zostają na pola płodozmianowe, którym przypisane zostają na wstępie doświadczenia określone fazy zmianowania. Pola pełnią rolę obiektów, ich efekty wyrażone poprzez plony rośliny testowej przyjmowane są jako konkretny efekt zastosowanego zmianowania.

3. Symbolika i relacje macierzowe

Przez $\mathbf{1}_N$, \mathbf{I}_N , \mathbf{J}_N oznaczać będziemy odpowiednio: N -wymiarowy wektor jedynek, macierz jednostkową rzędu N oraz macierz wymiaru $N \times N$ złożoną z jedynek. Symbol \mathbf{k}^δ reprezentuje macierz diagonalną, której elementy określają kolejne składowe wektora \mathbf{k} , natomiast $\text{diag}(\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N)$ oznacza macierz blokowo-diagonalną o składowych $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N$. Znak \otimes określa iloczyn Kroneckera (Okta, 1973, 1975).

W dalszej kolejności wprowadzone zostaną pewne wielkości charakteryzujące układ eksperymentalny z rośliną testową. Dla uproszczenia symbolika przedstawiona zostanie w przypadku eksperymentu płodozmiannego mającego na celu porównanie ekonomicznej efektywności dwóch schematów zmieniania. Stosowany w praktyce układ polowy jest szczegółowo opisany w pracy Przybysza (1982b). Nakreślony schemat bez trudu można uogólnić w przypadku porównania $m > 2$ płodozmiannów. Długości porównywanych rotacji oznaczymy przez v_1 , v_2 , odpowiednio. Pojedynczy blok obejmuje więc $v = v_1 + v_2$ jednostek eksperymentalnych, przypisanych kolejnym fazom porównywanych płodozmiannów. Przez k_1 , k_2 rozumiemy krotności pojawienia się rośliny testowej na pojedynczym poletku w ciągu pełnej rotacji każdego z porównywanych schematów zmieniania. Dodatkowo określimy $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_1, k_2, \dots, k_2)'$, gdzie składowa k_i zostaje powtórzona v_i -krotnie ($i=1,2$), przez $k = k_1 + k_2$ oznaczymy ilość obserwacji w ciągu jednego roku prowadzenia eksperymentu (przyjęte konwencje dotyczą pojedynczej replikacji). Liczbę wszystkich obserwacji (wskazań rośliny testowej) w ciągu b lat trwania eksperymentu oznaczymy przez n . Istnieje związek $n = bk$.

Przez \mathbf{X}_a , \mathbf{X}_b oznaczymy macierze, które będą odzwierciedlały układ pojedynczego bloku. Ich struktura jest ściśle związana z rozmieszczeniem rośliny testowej w stosunku do poletek oraz lat (John, 1987). Niech \mathbf{X}_a oznacza $n \times v$ wymiarową macierz układu związaną z poletkami. Jest to binarna macierz blokowo-diagonalna postaci $\mathbf{X}_a = \text{diag}(\mathbf{I}_{v_1} \otimes \mathbf{1}_{k_1}, \mathbf{I}_{v_2} \otimes \mathbf{1}_{k_2})$. Jako \mathbf{X}_b określimy $n \times b$ wymiarową macierz układu związaną z latami. Ponadto układ eksperymentalny z rośliną testową można opisać przy pomocy macierzy incydencji \mathbf{N} o wymiarze $v \times b$. Dla wyżej wprowadzonych macierzy zachodzą następujące związki

$$\mathbf{X}'_a \mathbf{1}_n = \mathbf{k}, \quad \mathbf{X}'_a \mathbf{X}_a = \mathbf{k}^\delta, \quad \mathbf{X}'_b \mathbf{1}_n = k \mathbf{1}_b, \quad \mathbf{X}'_b \mathbf{X}_b = k \mathbf{I}_b, \quad \mathbf{N} = \mathbf{X}'_a \mathbf{X}_b.$$

Mając na względzie tradycyjną terminologię związaną z układami bloków niekompletnych, w celu uniknięcia nieporozumień zaznaczyć należy, że \mathbf{k} jest w tym wypadku wektorem "replikacji" obiektowych (określa ilość obserwacji na poszczególnych poletkach) w pojedynczym bloku eksperymentalnym.

Kompletny opis struktury pojedynczej replikacji układu eksperymentalnego testującego m płodozmianów uzyskamy w postaci ciągu $\Pi = \langle v_1, \dots, v_m, B_1, \dots, B_m \rangle$, gdzie v_i ($i=1, \dots, m$) oznacza długość rotacji i -tego zmianowania, natomiast B_i jest „blokiem inicjującym” zawierającym numery tych poletek w obrębie i -tego schematu zmianowania, na których występuje roślina testowa w pierwszym roku doświadczenia. Ze względu na cykliczny charakter układu, elementy bloku inicjującego B_i przyjmuje się oznaczać $0, \dots, v_i - 1$ (John, 1987; Bronowicka-Mielniczuk i in., 2000). Poprzez $\Pi^\nabla = \langle r, \Pi \rangle$ oznaczać będziemy płodozmianowy układ doświadczalny z rośliną testową, którego plan eksperymentalny odnoszący się do pojedynczej replikacji określa układ bloków niekompletnych Π , r jest liczbą replikacji tego układu.

4. Efektywność doświadczeń płodozmianowych

Rozważania bieżącej części dotyczą wybranych własności planów eksperymentalnych związanych z porównawczym eksperymentem płodozmianowym wykorzystującym roślinę testową. Przedstawione zostanie zagadnienie efektywności rozważanych układów. Do określenia podstawowych pojęć posłuży klasyczna koncepcja efektywności oparta na wariancji ocen kontrastów międzyobiektowych.

4.1. Model liniowy doświadczenia

Przyjmijmy liniowy model stały, uwzględniając założenia szczegółowo przedstawione w pracy Przybysza (1982b) (także Przybysz, 1981; Przybysz, 1982a; Przybysz, 1982c)

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_M \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}_R \boldsymbol{\rho} + \mathbf{X}_A \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}_1 \mathbf{e} + \mathbf{X}_B \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_{RB} \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{X}_{AB} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.1)$$

gdzie \mathbf{y} jest wektorem kolumnowym obserwacji o wymiarze $N = nr$, μ jest efektem ogólnym, ρ , α , β są wektorami efektów replikacji, obiektów i lat o wymiarach odpowiednio r , v , b , natomiast γ , φ są wektorami odpowiednich efektów interakcyjnych. \mathbf{X}_M jest N -wymiarowym wektorem kolumnowym złożonym z jedynek, \mathbf{X}_R , \mathbf{X}_A , \mathbf{X}_B , \mathbf{X}_{RB} , \mathbf{X}_{AB} są odpowiednio $N \times r$, $N \times v$, $N \times b$, $N \times rb$, $N \times kb$ wymiarowymi, binarnymi macierzami układu dla bloków, obiektów, lat oraz interakcji. \mathbf{e} jest $rv \times 1$ wymiarowym wektorem losowym o wartości oczekiwanej równej zero i macierzy kowariancji $D(\mathbf{e}) = \sigma_1^2 \mathbf{I}_{rv}$, ε jest $N \times 1$ wymiarowym wektorem losowym o zerowej wartości oczekiwanej oraz $D(\varepsilon) = \sigma_2^2 \mathbf{I}_N$. \mathbf{X}_1 oznacza $N \times rv$ wymiarową macierz układu związaną z tzw. pierwszym błędem, \mathbf{X}_2 symbolizuje macierz jednostkową rzędu N odpowiadającą technicznemu błędowi eksperymentalnym.

Przyjmuje się uporządkowanie wektora \mathbf{y} według kolejności replikacji, obiektów oraz lat. Wtedy macierze występujące w (4.1) mają następującą strukturę blokową

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_M &= \mathbf{1}_N, \quad \mathbf{X}_R = \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{X}_A = \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{X}_a, \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{X}_a, \\ \mathbf{X}_B &= \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{X}_b, \quad \mathbf{X}_{RB} = \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{X}_b, \quad \mathbf{X}_{AB} = \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{I}_N. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2. Operatory rzutowe

Analiza statystycznych własności układu eksperymentalnego z rośliną testową uzyskuje zwartą formę dzięki użyciu teorii operatorów rzutowych (Harville, 1997; Mikos, 1973; Pease, 1965). Niech $\Theta = \{M, R, A, B, RB, AB, 1, 2\}$ będzie zbiorem wskaźników wyróżnionych w modelu źródeł zmienności, natomiast $\mathbf{X}_t, t \in \Theta$, reprezentuje przestrzeń rozpiętą na kolumnach macierzy \mathbf{X}_t . Ponadto przez $\mathbf{P}_t, t \in \Theta$ oznaczmy macierz rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń \mathbf{X}_t .

Z uwagi na (4.2) otrzymujemy następujące postaci operatorów rzutowych

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_M &= r^{-1} \mathbf{J}_r \otimes n^{-1} \mathbf{J}_n, \quad \mathbf{P}_R = n^{-1} \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{J}_n, \quad \mathbf{P}_A = r^{-1} \mathbf{J}_r \otimes \mathbf{P}_a, \\ \mathbf{P}_B &= r^{-1} \mathbf{J}_r \otimes \mathbf{P}_b, \quad \mathbf{P}_{RB} = \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{P}_b, \quad \mathbf{P}_{AB} = r^{-1} \mathbf{J}_r \otimes \mathbf{I}_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Łatwo wykazać, że \mathbf{P}_a jest macierzą blokowo-diagonalną posiadającą na diagonalu elementy $k_i^{-1} \mathbf{I}_{v_i} \otimes \mathbf{J}_{k_i}$, $i = 1, \dots, m$, natomiast $\mathbf{P}_b = k^{-1} \mathbf{X}_b \mathbf{X}_b'$.

Niech $\theta_1 = \{RB, B, R, M\}$. Następujące spostrzeżenia

$$\mathbf{P}_{RB} \mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t, \quad t \in \theta_1,$$

prowadzą bezpośrednio do inkluzji podprzestrzeni

$$\mathcal{X}_t \subseteq \mathcal{X}_{RB}, \quad t \in \theta_1. \quad (4.4)$$

4.3. Estymacja parametrów obiektowych

Zdefiniujmy następujące macierze

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_b) \mathbf{X}_a, \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{I}_N - \mathbf{P}_B) \mathbf{X}_A. \quad (4.5)$$

Wykorzystując powyższe definicje, otrzymujemy

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{P}_{RB} - \mathbf{P}_B) \mathbf{X}_A + (\mathbf{I}_N - \mathbf{P}_{RB}) \mathbf{X}_A = \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{S}. \quad (4.6)$$

Dodatkowo określmy $v \times v$ wymiarową macierz

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}' \mathbf{S}.$$

Biorąc pod uwagę (4.5) i (4.6) możemy zapisać

$$\mathbf{C} = r^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{Z} = r^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{X}_A. \quad (4.7)$$

Macierz \mathbf{C} nazywać będziemy macierzą informacji.

Przypomnijmy, że zredukowany układ równań normalnych dla estymacji wektora ma następującą postać (Przybysz, 1982b)

$$r \mathbf{C} \alpha = \mathbf{Z}' \mathbf{y}. \quad (4.8)$$

Z uwagi na własności (4.3), (4.6) otrzymujemy $\mathbf{Z}' \mathbf{P}_{RB} = \mathbf{0}$, co oznacza, że $\mathcal{Z} \perp \mathcal{X}_{RB}$. Inkluzje (4.4) implikują $\mathcal{Z} \perp \mathcal{X}_t$, $t \in \theta_1 = \{RB, B, R, M\}$, co można wyrazić w równoważnej postaci

$$\mathbf{Z}'\mathbf{X}_t = \mathbf{0}, \quad t \in \theta_1. \quad (4.9)$$

Oznaczmy $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}'\mathbf{y}$. Ze względu na relacje (4.1), (4.9) oraz zależności (4.2), (4.7) uzyskujemy kolejno

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}'\mathbf{X}_A\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Z}'\mathbf{X}_1\mathbf{e} + \mathbf{Z}'\mathbf{X}_{AB}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Z}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\varepsilon} = r\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{1}'_r \otimes \mathbf{C})\mathbf{e} + r\mathbf{S}'\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Korzystając z przyjętych założeń stochastycznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\mathbf{Q} &= r\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} + r\mathbf{S}'\boldsymbol{\varphi}, \\ \text{Cov}(\mathbf{Q}) &= E(\mathbf{Q} - E\mathbf{Q})(\mathbf{Q} - E\mathbf{Q})' = \sigma_1^2 r\mathbf{C}^2 + \sigma_2^2 r\mathbf{C}. \end{aligned}$$

Następnie w oparciu o (4.8) stwierdzamy, że

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \text{Cov}(r^{-1}\mathbf{C}^-\mathbf{Q}) = r^{-1}\mathbf{C}^-(\sigma_1^2\mathbf{C}^2 + \sigma_2^2\mathbf{C})\mathbf{C}^-.$$

Wykorzystując zależności $\mathbf{C}^-\mathbf{C}^2\mathbf{C}^- = \mathbf{P}_C$ oraz $\mathbf{C}^-\mathbf{C}\mathbf{C}^- = \mathbf{C}^+$, otrzymujemy

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = r^{-1}(\sigma_1^2\mathbf{P}_C + \sigma_2^2\mathbf{C}^+), \quad (4.10)$$

gdzie \mathbf{P}_C oznacza operator rzutu prostopadłego na przestrzeń kolumnową macierzy \mathbf{C} , \mathbf{C}^- jest uogólnioną macierzą odwrotną macierzy \mathbf{C} , natomiast \mathbf{C}^+ oznacza uogólnioną odwrotność Moore'a-Penrose'a.

4.4. Efektywność układu płodozmianowego

Niech $\mathbf{s}'\boldsymbol{\alpha}$ oznacza funkcję parametryczną, taką że $\mathbf{s}'\mathbf{1}_v = 0$. Funkcję $\mathbf{s}'\boldsymbol{\alpha}$ nazywać będziemy kontrastem obiektowym. Istotnym założeniem przyjętym w pracy jest, aby wszystkie kontrasty obiektowe były estymowalne. Jest to równoważne stwierdzeniu, że rząd macierzy informacji \mathbf{C} wynosi $v-1$. Układ spełniający powyższy warunek nazywamy układem spójnym. Ze względu na (4.10) otrzymujemy

$$\text{Cov}(\mathbf{s}'\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = r^{-1}(\sigma_1^2\mathbf{s}'\mathbf{P}_C\mathbf{s} + \sigma_2^2\mathbf{s}'\mathbf{C}^+\mathbf{s}) = r^{-1}(\sigma_1^2|\mathbf{s}|^2 + \sigma_2^2\mathbf{s}'\mathbf{C}^+\mathbf{s}) \quad (4.11)$$

Rozważmy teraz sytuację doświadczalną, w której ocena porównawcza zostaje dokonana w oparciu o współczynniki przeliczeniowe. Po zastosowaniu procedury przeliczeniowej dysponujemy obserwacjami z każdego poletka w każdym kolejnym roku doświadczenia i uzyskujemy kompletny układ danych. Przy tak sformułowanych założeniach

$$\mathbf{C} = b(\mathbf{I}_v - v^{-1}\mathbf{J}_v) = b\mathbf{P}_C, \quad \mathbf{C}^+ = b^{-1}\mathbf{P}_C,$$

co prowadzi do następującego wyniku

$$\text{Cov}(\mathbf{s}'\hat{\alpha}) = r^{-1}|\mathbf{s}|^2(\sigma_1^2 + b^{-1}\sigma_2^2). \quad (4.12)$$

Dla kontrastu elementarnego $|\mathbf{s}|^2 = 2$, tak więc relacja (4.12) przyjmie dobrze znaną postać dla klasycznego układu split-plot (Hinkelmann i Kempthorne, 1994).

W związku z przyjętą metodą, wykorzystującą plony rośliny testowej, nasuwa się pytanie o wielkość straty informacji jaką ponosimy w wyniku świadomej redukcji danych eksperymentalnych do obserwacji odnoszących się wyłącznie do ustalonego gatunku roślin. Liczbowa wartość, stanowiąca pewną względną miarę tej straty, związana jest w pośredni sposób z efektywnością układu płodozmianowego z rośliną testową. Kryteria oceny układu, czy też doboru wspomnianej miary związane będą z estymacją liniowych funkcji parametrycznych postaci $\mathbf{s}'\alpha$, a ściślej mówiąc z dokładnością ich statystycznej oceny.

Przez efektywność układu z rośliną testową względem $\mathbf{s}'\alpha$, oznaczaną dalej przez $E(\mathbf{s})$, rozumiemy iloraz wariancji ocen rozważanej funkcji parametrycznej uzyskanych w układzie kompletnym oraz w odpowiadającym mu układzie z rośliną testową, odpowiednio. Z uwagi na (4.11) oraz (4.12), definicję powyższą można zapisać następująco

$$\begin{aligned} E(\mathbf{s}) &= \frac{r^{-1}|\mathbf{s}|^2(\sigma_1^2 + b^{-1}\sigma_2^2)}{r^{-1}(\sigma_1^2|\mathbf{s}|^2 + \sigma_2^2\mathbf{s}'\mathbf{C}^+\mathbf{s})} \\ &= \frac{b\psi + 1}{b\psi + e^{-1}(\mathbf{s})}, \end{aligned}$$

gdzie $\psi = \sigma_1^2/\sigma_2^2$, natomiast

$$e^{-1}(\mathbf{s}) = \frac{b\mathbf{s}'\mathbf{C}^+\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^2}.$$

Przez efektywność planu Π^∇ , oznaczaną przez $E(\Pi^\nabla)$, rozumiemy iloraz średnich wariancji ocen kontrastów elementarnych uzyskanych dla układu płodozmianowego kompletnego oraz danego układu Π^∇ , odpowiednio. Niech C oznacza klasę v -wymiarowych wektorów rzeczywistych określających kontrasty elementarne. Mając na względzie wyniki (4.11) oraz (4.12), powyższą definicję możemy wyrazić następująco

$$E(\Pi^\nabla) = \frac{2r^{-1}(\sigma_1^2 + b^{-1}\sigma_2^2)}{\binom{v}{2}^{-1} \sum_{\mathbf{s} \in C} r^{-1}(2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \mathbf{s}'\mathbf{C}^+\mathbf{s})}. \quad (4.13)$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy oznaczenie

$V(\Pi) = \binom{v}{2}^{-1} \sum_{\mathbf{s} \in C} \mathbf{s}'\mathbf{C}^+\mathbf{s}$. Przeprowadzając proste przekształcenia algebraiczne, formułę (4.13) możemy nadać następującą postać

$$E(\Pi^\nabla) = \frac{\sigma_1^2 + b^{-1}\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 V(\Pi)/2} = \frac{b\psi + 1}{b\psi + E^{-1}(\Pi)},$$

gdzie

$$E(\Pi) = \frac{2}{bV(\Pi)}.$$

Zauważmy, że $E(\Pi^\nabla)$ jest funkcją rosnącą względem ψ . Ponadto jeżeli dla dwóch dowolnych układów eksperymentalnych Π_1 i Π_2 zachodzi nierówność $E^{-1}(\Pi_1) < E^{-1}(\Pi_2)$, to $E(\Pi_1^\nabla) > E(\Pi_2^\nabla)$.

W dalszych rozważaniach wykorzystujemy znane z licznych opracowań (Ceranka, 1973; Gnot, 1973; Constantine, 1987; John, 1987) wyniki w zakresie efektywności układów bloków niekompletnych. W oparciu o zależność $\binom{v}{2}V(\Pi) = vTr(\mathbf{C}^+)$, możemy zapisać $E(\Pi) = \frac{v-1}{bTr(\mathbf{C}^+)}$, gdzie $Tr(\mathbf{C}^+)$

oznacza ślad macierzy \mathbf{C}^+ . Ponieważ $Tr(\mathbf{C}^+)$ jest równy sumie wartości własnych macierzy \mathbf{C}^+ ostatecznie otrzymujemy

$$E(\Pi^\nabla) = (v-1) \frac{\psi + 1/b}{\psi(v-1) + \sum_{i=1}^{v-1} \lambda_i^{-1}},$$

gdzie λ_i są niezerowymi wartościami własnymi macierzy informacji \mathbf{C} .

5. Zastosowania

Ostatni rozdział poświęcony jest aplikacjom przyjętych w poprzedniej części pracy koncepcji oraz uzyskanych rozwiązań teoretycznych. Interesuje nas w jaki sposób pewne modyfikacje organizacyjne w zakresie doboru rośliny testowej, czy też okresu prowadzenia doświadczenia, kształtują właściwości statystyczne układów eksperymentalnych. Kierując się przy wyborze planu eksperymentalnego przedstawionymi wcześniej kryteriami, możemy zwiększyć precyzję (efektywność) badań poprzez właściwe rozmieszczenie rośliny testowej lub też zmniejszyć nakłady potrzebne na realizację doświadczenia (okres prowadzenia eksperymentu, liczbę powtórzeń). Tak więc, korzystając z przyjętych rozwiązań możemy "kontrolować" istotne ze statystycznego punktu widzenia właściwości układów płodozmianowych.

5.1. Efektywność układu eksperymentalnego

Rozważymy układ eksperymentalny opisany za pomocą Tabeli 1. Wówczas zgodnie z przyjętą symboliką układ eksperymentalny można zapisać jako $\Pi = \langle 4, 4, (02), (03) \rangle$, gdzie $b = v_1 = v_2 = 4$, $k_1 = k_2 = 2$, $n = 16$. Współczynnik efektywności $E(\Pi) = 0.404$. Jego wartość wyrażona procentowo oznacza, że podejmując decyzję o przeprowadzeniu badań przy użyciu rośliny testowej (Po, Ps, Jm) otrzymamy 40% tej informacji, jaką byśmy mogli otrzymać gdyby doświadczenie było przeprowadzone w układzie kompletnym. Przy czym zaznaczyć należy, że wspomniana "strata" informacji oznacza zmniejszenie precyzji oceny kontrastów obiektowych (poprzez wzrost średniej wariancji wspomnianych oszacowań).

Tabela 1. Schemat polowy eksperymentu płodozmianowego

nr roku	nr pola							
	1	2	3	4	1'	2'	3'	4'
1	Po	Gr	Jm	Zm	Ps	Ps	Rz	Gr
2	Zm	Po	Gr	Jm	Gr	Ps	Ps	Rz
3	Jm	Zm	Po	Gr	Rz	Gr	Ps	Ps
4	Gr	Jm	Zm	Po	Ps	Rz	Gr	Ps

Oznaczenia: Po-pszenica ozima Zm-ziemniak Ps-pszenica ozima
 Jm-jęczmień jary Gr-groch siewny Rz-rzepak ozimy

W tym miejscu poczynimy istotną uwagę. W myśl przyjętych reguł, planem odniesienia dla równoreplikowalnego układu bloków niekompletnych Π jest układ bloków kompletnych o parametrach $b = 4, v = 8$, a nie $b = 2$. Dlatego też, wartość współczynnika $E(\Pi)$ jest dwukrotnie mniejsza od wartości jaką przyjmuje klasycznie określony współczynnik efektywności (John, 1987). Analogiczne uwagi dotyczą wszystkich dalszych rozważań.

5.2. Układy o jednakowej strukturze zasiewów

Stojąc przed problemem porównania dwóch (lub więcej) płodozmianów należy zawsze podjąć decyzję o sposobie rozmieszczenia rośliny testowej w schemacie polowym. Gdy porównywane płodozmiany mają z góry określony jej udział w strukturze zasiewów, znajomość współczynnika efektywności może ułatwić taką decyzję.

W tabeli 2 zestawiono wartości współczynnika efektywności $E(\Pi)$ oraz średnią wariancję ocen kontrastów elementarnych $V(\Pi)$ dla wybranych układów bloków niekompletnych, ich parametry wyszczególniono w początkowych kolumnach. Podano wartości parametrów $V(\Pi)$ oraz $E(\Pi)$ w zakresie tylko tych układów, które odpowiadają zainteresowaniom praktycznym. Dzięki znajomości wartości współczynnika efektywności możemy wskazać "bardziej efektywny" plan rozmieszczenia rośliny testowej w układzie eksperymentalnym. Należy jednak pamiętać, że wybór układu jest ograniczony ze względu na wymogi racjonalnej agrotechniki. Jest to nadrzędna zasada, którą należy się kierować rozpatrując kwestie związane z rozmieszczeniem rośliny testowej w płodozmianie.

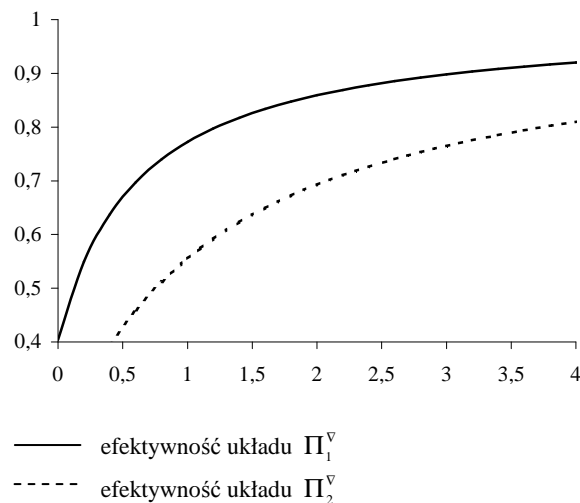
Tabela 2. Numeryczne porównanie wartości współczynnika efektywności dla cyklicznych układów bloków niekompletnych

m	$v_i, i = 1, \dots, m$		b	$B_i, i = 1, \dots, m$	$V(\Pi)$	$E(\Pi)$
				bloki inicjujące		
$m=2$	$v_1 = 4$	$v_2 = 4$	$b = 4$	(01),(01)	1.286	.389
				(01),(012)	.935	.535
				(02),(012)	.966	.518
				(0),(03)	2.500	.200
				(0),(012)	1.690	.296
				(012),(012)	.702	.712
				(02),(03)	1.238	.404
	$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$b = 12$	(0),(01)	.544	.306
				(0),(012)	.407	.410
				(0),(02)	.599	.278
				(0),(0)	1.095	.152
	$v_1 = 5$	$v_2 = 5$	$b = 5$	(01),(01)	1.444	.277
				(01),(02)	1.267	.316
				(01),(013)	.964	.414
				(0),(013)	1.764	.227
				(0),(01)	2.833	.141
				(0),(02)	2.833	.141
				(02),(02)	1.444	.277
				(02),(013)	.996	.402
				(013),(013)	.734	.545
	$m=3$	$v_1 = 4$	$v_2 = 4$	$b = 4$	(02),(02),(01)	1.218
$v_3 = 4$			(02),(01),(01)		1.136	.440
			(02),(02),(012)		1.039	.481
			(02),(01),(0)		1.697	.295
			(01),(01),(0)		1.742	.287
			(01),(02),(012)		.971	.515
			(01),(01),(012)		.978	.511
			(0),(01),(012)		1.425	.351
			(0),(02),(012)		1.453	.344

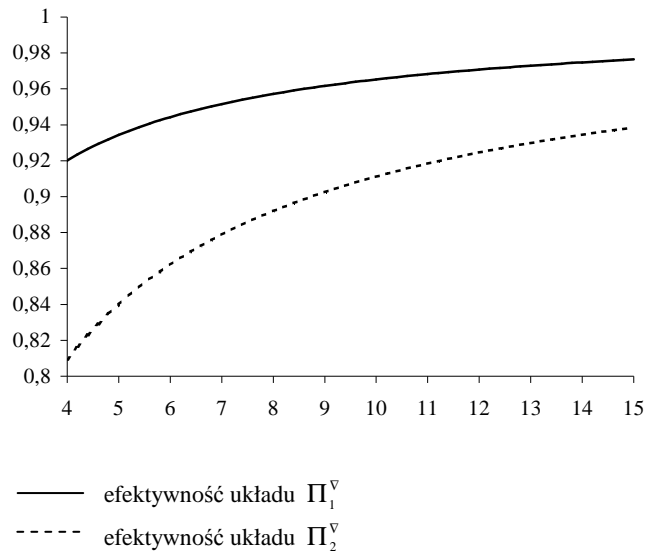
5.3. Zagadnienie wyboru rośliny testowej

Przyjmując metodę wykorzystującą plony rośliny testowej stajemy również przed problemem decyzyjnym dotyczącym wyboru rośliny testowej. Rozważmy ponownie eksperyment obejmujący płodozmiany zbożowe zamieszczone w tabeli 1. Jako roślinę testową możemy wybrać zboża, a następnie do ich plonów zastosować odpowiednie współczynniki przeliczeniowe. Alternatywą jest wybór pszenicy jako rośliny testowej, przez co unikamy procedury przeliczeniowej, a w konsekwencji dane eksperymentalne nie będą obciążone błędem z nią związanym.

W związku z postawionym powyżej problemem, nasza dyskusja obejmuje porównawcze układy płodozmiadowe o długości rotacji równej cztery. Zgodnie z danymi w Tabeli 2, dla układu $\Pi_1 = \langle 4, 4, (02), (03) \rangle$ uzyskujemy charakterystyki $V(\Pi_1) = 1.238$, $E(\Pi_1) = 0.404$. Analogicznie dla schematu $\Pi_2 = \langle 4, 4, (0), (03) \rangle$ odczytujemy $V(\Pi_2) = 2.5$ oraz $E(\Pi_2) = 0.2$. Analiza porównawcza zachowania się współczynników efektywności rozważanych układów płodozmiadowych Π_1^∇ , Π_2^∇ przedstawiona została na Rysunkach 1 i 2. Rozpatrywano wpływ wartości parametru ψ (tzn. ilorazu komponentów wariancji) na wartość współczynnika $E(\Pi^\nabla)$. Analizę ograniczono do wartości parametru ψ w zakresie od zera do piętnastu. Przyjęto iż oś X jest osią wartości parametru ψ , natomiast oś Y odpowiada wartościom $E(\Pi^\nabla)$. Na pierwszym z rysunków ψ przebiega wartości od 0 do 4, przy czym dla $\psi = 4$, dla pierwszego układu (gdzie rośliną testową są zboża) $E(\Pi_1^\nabla) = 0.92$, a dla układu drugiego (gdzie rolę rośliny testowej pełni tylko pszenica) $E(\Pi_2^\nabla) = 0.81$. Rysunek 2 obejmuje kolejne wartości parametru ψ , od 4 do 15. Zauważmy, że wraz ze wzrostem parametru ψ różnica pomiędzy wartościami obu współczynników sukcesywnie zmniejsza się.



Rys. 1. Porównanie współczynników efektywności układów płodozmiadowych Π_1^∇ , Π_2^∇ dla $\psi < 4$



Rys. 2. Porównanie współczynników efektywności układów płodozmianowych Π_1^v , Π_2^v dla $\psi \geq 4$

W konkluzji przeprowadzonych badań możemy stwierdzić, że warunki "sprzyjające" drugiemu sposobowi analizy określa wartość parametru $\psi > 4$, a przy bardziej restrykcyjnym podejściu $\psi > 10$. Wówczas oba współczynniki $E(\Pi_1^v)$ i $E(\Pi_2^v)$ swoją wartością przewyższają liczbę 0,9, tak więc oba układy płodozmianowe Π_1^v , Π_2^v odznaczają się wysoką efektywnością. Ponadto zauważmy, iż różnica pomiędzy $E(\Pi_1^v)$, a $E(\Pi_2^v)$ z praktycznego punktu widzenia staje się nieistotna. Wybierając zatem plan eksperymentalny Π_2^v , w którym rolę rośliny testowej pełni pszenica, unikamy procedury przeliczeniowej dla plonów (nie obciążamy danych eksperymentalnych wynikającymi z tego błędami) uzyskując efektywność na równie wysokim poziomie jak dla planu eksperymentalnego Π_1^v .

5.4. Stabilność układu eksperymentalnego

Opracowana teoria może znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień związanych z losową lub też świadomą utratą obserwacji. Z uwagi na drugi z wymienionych przypadków, przedmiotem krótkich rozważań będą schematy eksperymentalne z niepełną rotacją.

Ze względów praktyki eksperymentalnej można ustąpić z żądania zachowania pełnej rotacji każdego z porównywanych płodozmianów, tzn. z praktycznego punktu widzenia realizacja doświadczenia zgodnie z powyższym wymogiem może okazać się zbyt czasochłonna lub też uciążliwa z uwagi na duże nakłady ekonomiczno-organizacyjne. W związku z powyższym, zainteresowani jesteśmy oceną stabilności pewnych właściwości statystycznych układu. Współczynnik efektywności może służyć w takim wypadku jako kryterium wspomnianej oceny w kontekście planowanej redukcji czasu trwania eksperymentu, do okresu krótszego niż określony przez wspomniany postulat.

Dla przykładu posłużymy się schematem eksperymentalnym doświadczenia obejmującego płodozmian cztero- i trzyletni. Rozważmy serię eksperymentów, które charakteryzują się sukcesywną redukcją liczby lat trwania doświadczenia połowego. Tabela 3 podaje wartości parametru $V(\Pi)$ dla trzech układów Π_α , Π_β , Π_γ . Począwszy od okresu 12-letniego, obliczono wartość średniej wariancji porównań międzyobiektowych, dla wszystkich trzech układów. W kolejnych wierszach Tabeli 3 podane są wartości parametru $V(\Pi)$, przy jednoczesnej redukcji czasu trwania doświadczenia, aż do okresu 3-letniego. Własność spójności wszystkich rozważanych układów została zachowana dla okresu czteroletniego (układ Π_β nie jest spójny dla okresu trzyletniego). W świetle uzyskanych wyników możemy stwierdzić, iż w każdym z przypadków schemat zredukowany do okresu sześcioletniego odznacza się niską, zaledwie 50%-ową, efektywnością w stosunku do schematu "wyjściowego". Podkreślimy, iż powyższa konkluzja dotyczy układu bloków niekompletnych.

Tabela 3. Średnia wariancja porównań międzyobiektowych dla układów $\Pi_\alpha = \langle 3,4, (0), (01) \rangle$, $\Pi_\beta = \langle 3,4, (0), (02) \rangle$, $\Pi_\gamma = \langle 3,4, (0), (012) \rangle$, zredukowanych względem ilości lat

czas trwania eksperymentu w latach	średnia wariancja		
	$V(\Pi_\alpha)$	$V(\Pi_\beta)$	$V(\Pi_\gamma)$
12	.544	.599	.407
11	.605	.671	.451
10	.673	.752	.496
9	.744	.848	.545
8	.871	.955	.630
7	1.031	1.073	.723
6	1.237	1.198	.827
5	1.631	1.742	1.075
4	2.048	2.905	1.347
3	3.524	-----	1.714

6. Podsumowanie

Znajomość liczbowej wartości wskaźnika efektywności jest pomocna przy podejmowaniu decyzji dotyczącej wyboru metodyki opracowania doświadczenia (gatunku testowego lub grupy testowej). Ponadto, współczynnik ten może ułatwić wybór schematu rozmieszczenia rośliny testowej w całym cyklu zmianowania w przypadku, gdy względy agrotechniczne dopuszczają zastosowanie kilku schematów zmianowania. Pokazuje on również statystyczną jakość układu doświadczalnego, w kontekście świadomego lub też losowego skrócenia czasu trwania eksperymentu. Należy podkreślić, że współczynnik efektywności odzwierciedla statystyczne właściwości układu eksperymentalnego, wynikające tylko i wyłącznie ze sposobu rozmieszczenia rośliny testowej (postaci macierzy incydencji). Nie zależy w żadnym stopniu od roślin (gatunków) występujących w płodozmianie. Zaś o wartości płodozmiannu decyduje plon rośliny testowej, na który "przenosi się" również udział pozostałych gatunków. Uzyskane w wyniku rzeczywistego eksperymentu dane, powinny być następnie ocenione i zweryfikowane poprzez odpowiednie procedury statystyczne.

W podsumowaniu rozważań teoretycznych stwierdzamy, że wartość liczbową współczynnika efektywności $E(\Pi^\nabla)$ dla planu eksperymentalnego $\Pi^\nabla = \langle \Pi, r \rangle$ jest uzależniona w sposób bezpośredni od: liczby lat prowadzenia eksperymentu b , liczby obiektów (sekwencji) v , struktury odpowiadającego mu układu bloków niekompletnych Π (rozmieszczenie rośliny testowej) oraz wartości ilorazu komponentów wariancyjnych ψ . Natomiast jego wartość nie zależy od liczby replikacji r układu Π . Numeryczne wyznaczenie jego wartości możliwe jest jedynie dla jednej replikacji układu płodozmiannowego, tzn. dla wspomnianego układu Π . W praktyce, gdy musimy uwzględnić większą liczbę replikacji należy przeprowadzić analizę zachowania się współczynnika efektywności w zależności od wartości wspomnianego ilorazu ψ . W tym celu możemy posłużyć się graficznym przedstawieniem odpowiednich funkcji jednej zmiennej. Bez wątpienia cenne będą tutaj informacje wpływające z wcześniejszych badań empirycznych.

Literatura cytowana

- Bronowicka-Mielniczuk U., Mielniczuk J., Przybysz T. (2000). Efficiency of cropping system designs via base contrast. *Applicationes Mathematicae* 27 (4), 377-384.
- Ceranka B. (1973). Układy doświadczalne o blokach niekompletnych. Teoria i zastosowanie. *Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii*, 143-212.

- Constantine G. (1987). *Combinatorial Theory and Statistical Design*. Wiley, New York.
- Gnot S. (1973). Efektywność układów blokowych. *Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii*, 242-257.
- Harville D.A. (1997). *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer-Verlag, New York.
- Hinkelmann K., Kempthorne O. (1994). *Design and Analysis of Experiments*. Wiley, New York.
- John J.A. (1987). *Cyclic designs*. London, Chapman and Hall.
- Mikos H. (1973). Operatory rzutowe w analizie wariancji. *Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii*, 78-142.
- Oktaba W. (1973). Iloczyn kroneckerowski macierzy w analizie wariancji dla zrównoważonych modeli matematycznych. *Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii*, 6-44.
- Oktaba W. (1975). Iloczyn kroneckerowski macierzy blokowych. *Piąte Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii*, 8-27.
- Pease M.C. (1965). *Methods of Matrix Algebra*. Academic Press, New York and London.
- Przybysz T. (1981). Porównanie dwóch płodozmianów o tej samej długości rotacji. *Listy Biometryczne* 75.
- Przybysz T. (1982a). Schematy eksperymentalne doświadczeń płodozmianowych. *Roczniki Nauk Rolniczych Seria A* 105, 7-15.
- Przybysz T. (1982b). Modele matematyczne doświadczeń płodozmianowych. *Roczniki Nauk Rolniczych Seria A* 105, 17-28.
- Przybysz T. (1982c). Analiza wariancji doświadczeń płodozmianowych. *Roczniki Nauk Rolniczych Seria A* 105, 29-37.

EFFICIENCY OF CROP ROTATION DESIGN

Summary

In this paper, we investigate crop rotation designs with a test crop. We elaborate on the assumed (fixed effects) linear model. The main goal of the study reported here is to derive some corresponding results about efficiency. The concept of efficiency provides a simple statistical criterion for evaluating and comparing different designs. Generally speaking, efficiency factor provides a measure of information available on the treatment contrasts. We deal with the usual overall efficiency factor based on the mean variance of all pairwise differences.

Key words and phrases: crop rotation experiment, efficiency factor, crop test

Classification AMS 2000: 62K10